

π -Meson-Elektron-Streuung und Struktur des π -Mesons

Von H. SALECKER

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Freiburg i. Br.
(Z. Naturforschg. 15 a, 1023—1030 [1960]; eingegangen am 18. Juli 1960)

In this article we propose π -meson-electron scattering as a possibility for investigating the electromagnetic structure of the pion. This experiment requires very high energy, but not necessarily such a high accuracy as the extrapolation procedure of CHEW and Low. After a short discussion of the general properties of the electromagnetic formfactor of the π -meson, we calculate the $\pi-e$ and the $e-\pi$ scattering cross sections with form factor. With an energy of 25 GeV and a 10% experimental error we can probe the root mean square radius of the pion down to $0.8 \cdot 10^{-13}$ cm, with 50 GeV down to $0.6 \cdot 10^{-13}$ cm and with 100 GeV to $0.36 \cdot 10^{-13}$ cm. The rms radius of the pion may be larger than previously assumed, because there exists the possibility of a fairly large $\pi-\pi$ interaction. A complementary possibility for investigating the electromagnetic structure of the pion consists in electron-positron pair annihilation with the creation of a π^\pm pair. This process will probe the form factor of the π -meson for timelike arguments.

Die elektromagnetische Struktur der Elementarteilchen hat in den letzten Jahren steigendes Interesse gefunden. Besonders die Struktur der Nukleonen ist, angeregt durch die Experimente von HOFSTADTER und Mitarbeitern¹, von mehreren Seiten untersucht worden. Unter anderem wurde hier mit Hilfe von Dispersionsbeziehungen wenigstens beim magnetischen Formfaktor ein halbwegs quantitatives Verständnis erreicht²⁻⁴. Dabei spielt jedoch der elektromagnetische Formfaktor des π -Mesons eine wesentliche Rolle, wie man bereits qualitativ aus der Tatsache entnimmt, daß das Nukleon nach der lokalen Feldtheorie aus einem inneren Kern (core) von etwa der Ausdehnung der Nukleon-COMPTON-Wellenlänge besteht und einer Wolke virtueller π -Mesonen, die sich nach den HOFSTADTERSchen Experimenten weiter nach außen ausdehnt. Es ist natürlich klar, daß diese Ausdehnung und ihre Verteilung wesentlich durch eine etwaige Struktur des π -Mesons beeinflußt wird. Die letztere ist deshalb vom Standpunkt der Nukleonenstruktur ebenfalls mit Dispersionsbeziehungen berechnet worden^{3, 4}. Aber auch abgesehen vom Einfluß auf die Struktur der Nukleonen beansprucht die Struktur des π -Mesons für sich erhebliches Interesse.

Experimentell könnte die elektromagnetische Struktur des π -Mesons aus der π -Meson-Elektron-Streuung bestimmt werden. Wegen des großen Massenunterschiedes fliegt das Schwerpunktsystem aber

nahezu mit dem π -Meson, so daß die Energie-Impuls-Übertragung erst bei sehr hohen Energien genügend groß wird, um die Verhältnisse bei kleinen Abständen zu prüfen. Viel günstiger wäre hier die Elektron- π -Meson-Streuung, bei der sich, wie wir im 3. Abschnitt zeigen werden, dieselben Verhältnisse schon bei Energien, die um den Faktor $(m_\pi/m_e) \approx 273$ kleiner sind als bei der $\pi-e$ -Streuung, erreichen ließen. Leider gibt es aber keine Targets aus π -Mesonen. Kürzlich haben jedoch CHEW und LOW⁵ in allgemeinerem Zusammenhang den interessanten Vorschlag gemacht, die Streuung an reellen Teilchen aus dem Streuquerschnitt an den entsprechenden virtuellen Teilchen zu extrapoliieren. Betrachten wir z. B. die Elektroproduktion von π -Mesonen an Protonen $e^- + p \rightarrow e^- + n + \pi^+$, so wird das Elektron an einem virtuellen π -Meson der Mesonenwolke des Protons gestreut, wobei die Energie-Impuls-Übertragung auf das π -Meson genügend groß ist, so daß es reell emittiert wird. Wie CHEW und LOW wahrscheinlich machen, muß die Streuamplitude für die Elektroproduktion von π -Mesonen als Funktion der Energie-Impuls-Übertragung r auf das Nukleon bis $r^2 = m_\pi^2$ analytisch fortgesetzt werden⁶, um die Streuung am freien π -Meson zu erhalten. Da dieser Wert außerhalb des physikalisch zugänglichen Bereichs liegt, müssen zu seiner experimentellen Bestimmung die gemessenen Streudaten extrapoliert werden, was

¹ R. HOFSTADTER, F. BUMILLER u. M. R. YEARIAN, Rev. Mod. Phys. **30**, 482 [1958] und dort zitierte frühere Arbeiten.

² G. F. CHEW, R. KARPLUS, S. GASIOROWICZ u. F. ZACHARIASEN, Phys. Rev. **110**, 265 [1958]. — P. FEDERBUSH, M. L. GOLDBERGER u. S. B. TREIMAN, Phys. Rev. **112**, 642 [1958].

³ W. R. FRAZER u. J. R. FULCO, Phys. Rev., Letters **2**, 365 [1959].

⁴ H. EISENLOHR u. H. SALECKER, Z. Naturforsch. **14 a**, 699 [1959]. — H. SALECKER (erscheint demnächst).

⁵ G. F. CHEW u. F. E. LOW, Phys. Rev. **113**, 1640 [1959].

⁶ Wir benutzen eine Metrik, so daß $p^2 = E^2 - p^2$ ($\hbar = c = 1$).



natürlich eine wesentlich größere Genauigkeit der experimentellen Ausgangswerte erfordert als bei einer direkt zu messenden Größe. FRAZER hat vor kurzem im einzelnen gezeigt⁷, daß die für eine sinnvolle Extrapolation erforderliche Meßgenauigkeit etwa um eine Größenordnung höher liegt als diejenige, die bei entsprechenden Experimenten bisher erreicht wurde. Eine solche Genauigkeitssteigerung bei Streuprozessen erscheint aber gegenwärtig und in naher Zukunft kaum möglich. Dagegen sind eine Reihe von Beschleunigungsmaschinen für sehr hohe Energien im Bau bzw. geplant (bis zu 300 GeV)⁸, so daß die um den Faktor $(m_\pi/m_e) \approx 273$ energetisch benachteiligte π -Meson-Elektron-Streuung in dem hier interessierenden Bereich bald durchführbar sein wird. Da dieser Streuquerschnitt direkt gemessen werden kann, benötigt man hierbei natürlich nur die übliche Genauigkeit.

Im ersten Abschnitt wird zunächst der elektromagnetische Formfaktor des π -Mesons genauer definiert; dann werden seine allgemeinen Eigenschaften untersucht. Dabei folgt aus der Invarianz der Theorie gegen Ladungskonjugation, daß der elektromagnetische Formfaktor des neutralen π -Mesons verschwindet. F_π ist also ein Vektor im isotopen Spiraum. Im zweiten Abschnitt werden der $\pi - e$ - und der $e - \pi$ -Streuquerschnitt in der Formfaktornäherung (Abb. 2, d. h. exakt in der starken Wechselwirkung und in niedrigster Näherung bezüglich der elektromagnetischen Wechselwirkung) berechnet und miteinander verglichen. Im dritten Abschnitt werden die Verhältnisse bei der π -Meson-Elektron-Streuung quantitativ untersucht. Da experimentell über den elektromagnetischen Formfaktor des π -Mesons noch nichts bekannt ist, kennt man auch nicht die Größenordnung des mittleren quadratischen Radius $\sqrt{r_\pi^2}$. Wenn wir nur eine YUKAWA-artige π -Meson-Nukleon-Wechselwirkung annehmen, wird F_π durch die Verteilung der virtuellen Nukleon-Antinukleon-Paare in der Umgebung des π -Mesons bedingt. $\sqrt{r_\pi^2}$ ist dann ziemlich klein, nämlich etwa gleich der doppelten COMPTON-Wellenlänge des Nukleons⁹. Wenn dagegen noch eine direkte $\pi - \pi$ -Wechselwirkung vorhanden ist, wie sie in der letzten Zeit z. B. im Zusammenhang mit der Struktur der Nukleonen diskutiert wird^{3, 4}, kann $\sqrt{r_\pi^2}$ wesentlich größer ausfallen. Wir

müssen deshalb den Einfluß sehr verschiedener Größen von $\sqrt{r_\pi^2}$ untersuchen. Dabei zeigt es sich (Tab. 1), daß schon mit den heute zugänglichen Energien bis 25 GeV zwischen den großen und den kleinen Werten von $\sqrt{r_\pi^2}$ unterschieden werden könnte. Bei einem Meßfehler von 10% kann man nach Abb. 3 den Formfaktor des π -Mesons unabhängig von seiner speziellen Gestalt bis auf $\sqrt{r_\pi^2} \approx 0,8 \cdot 10^{-13}$ cm herunter untersuchen, bei 50 GeV bis auf $0,6 \cdot 10^{-13}$ cm, bei 100 GeV bis auf $0,36 \cdot 10^{-13}$ cm und bei 300 GeV bis auf etwa $0,2 \cdot 10^{-13}$ cm. Abb. 4 gibt einen Überblick auch für größere Abweichungen von der Streuung eines punktförmigen π -Mesons, wenn die gestaltunabhängige Näherung (12) nicht mehr zulässig ist.

Vor kurzem ist bereits eine erste experimentelle Arbeit zur π -Meson-Elektron-Streuung durchgeführt worden¹⁰. Allerdings ist die Energie der π -Mesonen noch zu klein ($E_\pi = 1,13$ GeV, d. h. $\gamma = 8,13$), um Struktureffekte des π -Mesons sichtbar werden zu lassen, wie im 4. Abschnitt ausgeführt wird. Experimente bei höheren Energien bleiben hier abzuwarten.

Im letzten Abschnitt werden die Gültigkeitsgrenzen der Formfaktoranalyse besprochen. Diese sind besonders dadurch gegeben, daß alle höheren elektromagnetischen Näherungen vernachlässigt worden sind. Die Strahlungskorrekturen zum Elektronenstrom können in der nächsten Näherung in e^2 leicht mit Hilfe der SCHWINGERschen Strahlungskorrekturen¹¹ berücksichtigt werden, ganz entsprechend wie bei den HOFSTADTERSchen Streuexperimenten. Entsprechendes gilt für die Strahlungskorrekturen zum π -Mesonen-Strom, d. h. zum Formfaktor (Abb. 4). Beide beeinflussen die Gültigkeit der Formfaktornäherung nicht. Anders ist es, wenn mehrere Quanten zwischen π -Meson und Elektron ausgetauscht werden (Abb. 6). Die Formfaktoranalyse kann nur so lange gut sein, wie diese Terme vernachlässigbar klein sind im Vergleich zum experimentellen Fehler. Mit Hilfe einer Abschätzung für die Elektron-Proton-Streuung¹² wird wahrscheinlich gemacht, daß ihr Einfluß in dem hier betrachteten Bereich (bis 300 GeV) in dem zu erwartenden experimentellen Fehler von mindestens 10% verschwindet.

Zum Schluß wird darauf hingewiesen, daß bei allen Rechnungen die strenge Gültigkeit der Quan-

⁷ W. R. FRAZER, Phys. Rev. **115**, 1763 [1959].

⁸ Vgl. z. B. Proc. Internat. Conf. on High-Energy Accelerators and Instr. — CERN 1959.

⁹ L. BERTOCCHI u. A. MINGUZZI, Nuovo Cim. (X) **8**, 783 [1958].

¹⁰ F. S. CRAWFORD, JR., Phys. Rev. **117**, 1119 [1960].

¹¹ J. SCHWINGER, Phys. Rev. **76**, 790 [1949].

¹² S. D. DRELL u. S. FUBINI, Phys. Rev. **113**, 741 [1949].

tenelektrodynamik vorausgesetzt wurde. Aus Abb. 2 sieht man unmittelbar, daß zwischen dem Einfluß des π -Meson-Formfaktors und einer möglichen Abänderung der Quantenelektrodynamik durch π -Meson-Elektron-Streuung ähnlich wie bei der Elektron-Nukleon-Streuung nicht unterschieden werden kann. Hier können nur Elektron-Elektron- bzw. Elektron-Positron-Streuung¹³ bezüglich einer möglichen Nichtlokalität der virtuellen Photonausbreitungsfunktion entscheiden. Außerdem ist noch eine (nichtlokale) Abänderung der virtuellen Ausbreitungsfunktion des Elektrons in der Elektrodynamik denkbar¹⁴; sie hat hier keine Bedeutung, da in der niedrigsten elektromagnetischen Näherung der π - e-Wechselwirkung keine virtuellen Elektronenlinien vorkommen. Man kann sie ganz im Rahmen der Quantenelektrodynamik durch COMPTON-Streuung an Elektronen oder besser noch durch Zwei-Quanten-Paarvernichtung¹⁵ prüfen.

Eine interessante, im gewissen Sinne komplementäre Möglichkeit zur Prüfung der elektromagnetischen Struktur des π -Mesons erhält man dann, wenn man sich die Abb. 2 in der $x-t$ -Ebene um 90° gedreht vorstellt: Elektron-Positron-Paarvernichtung mit Erzeugung zweier π -Mesonen, wobei die elektromagnetische Wechselwirkung nur in niedrigster Näherung berücksichtigt wird, dagegen die starke Wechselwirkung durch den Formfaktor exakt. Bei der π -Meson-Elektron-Streuung ist der Energie-Impuls-Vierervektor q als Differenz zweier zeitartiger Vektoren p und p' raumartig. Bei der Paarvernichtung ist q als Summe zweier zeitartiger Vektoren dagegen ebenfalls zeitartig. Hier wird also der Formfaktor des π -Mesons (genauer das Absolutquadrat) für zeitartiges Argument gemessen.

Für dieses Argument kommt er auch in der Dispersionsbeziehung für die Nukleonenstruktur vor²⁻⁴, so daß mit Hilfe des Prozesses $e^+ + e^- \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ eine direkte Möglichkeit besteht, den π -Meson-Formfaktor in dem für die Nukleonenstruktur wesentlichen Bereich zu untersuchen. Die experimentelle Realisierung wird vor allem vor der Schwierigkeit stehen, einen genügend intensiven Positronenstrahl zu erzeugen, wobei die im Laboratoriumssystem benötigten sehr hohen Energien durch Experimente mit gegenläufigen Elektron-Positron-Strahlen (*colliding beams*) umgangen werden könnten.

¹³ H. SALECKER, Z. Naturforsch. **8a**, 16 [1953]; **10a**, 349 [1955].

1. Der elektromagnetische Formfaktor des π -Mesons

Der elektromagnetische Formfaktor des π -Mesons kann durch die Streuung eines π -Mesons an einem elektromagnetischen Feld (Abb. 1) definiert werden (π -Mesonenlinie $---$, Photonenlinie $\sim\sim\sim\sim$).

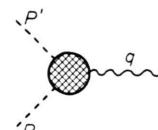


Abb. 1. FEYNMAN-Diagramm zur Definition des elektromagnetischen Formfaktors des π -Mesons (--- π -Mesonenlinie, ~~~~~ Photonenlinie bzw. elektromagnetisches Feld).

Dabei sollen alle Korrekturen höherer Ordnung infolge der starken Wechselwirkung der π -Mesonen (Nukleon-Antinukleon-Paare usw.) eingeschlossen sein, die elektromagnetische Wechselwirkung aber nur in erster Näherung berücksichtigt werden, da sie rund $(g^2/\hbar c)/(e^2/\hbar c) \approx 2000$ -mal schwächer als die starke Wechselwirkung ist. P und P' seien die Energie-Impuls-Vierervektoren des reellen π -Mesons vor und nach der Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld $q = P' - P$ und $j_\mu(P, P')$ das Matrixelement des Ladungs-Stromdichte-Operators des π -Mesons zwischen den Zuständen P und P' . Da j_μ ein Vektor ist, muß er aus einer Summe von Ausdrücken bestehen, die die Vektoren P und P' als Faktoren enthalten, weil keine weiteren Vektoren vorhanden sind. Diese Ausdrücke schließen außerdem noch eine skalare Funktion der Invarianten P^2 , P'^2 und $P \cdot P'$ ein, d. h. j_μ hat die Form

$$j_\mu(P, P') = P_\mu f(P^2, P'^2, P \cdot P') + P'_\mu g(P^2, P'^2, P \cdot P'). \quad (1)$$

P und P' bezeichnen reelle π -Mesenzustände; folglich ist $P^2 = P'^2 = m_\pi^2$ ($\hbar = c = 1$) und deshalb $q^2 = 2(m_\pi^2 - P \cdot P')$, so daß f und g als Funktion der Energie-Impuls-Übertragung q^2 allein ausgedrückt werden können

$$j_\mu(P, P') = P_\mu f(q^2) + P'_\mu g(q^2). \quad (2)$$

Wegen der Kontinuitätsgleichung für den Strom j_μ gilt außerdem

$$(P'_\mu - P_\mu) j_\mu(P, P') = 0. \quad (3)$$

¹⁴ S. D. DRELL, Ann. Physics **4**, 75 [1958].

¹⁵ H. SALECKER, im Erscheinen (Z. Physik **160**, Heft 4).

Damit folgt aus (2)

$$f(q^2) = g(q^2) \quad (4)$$

und deshalb

$$j_\mu(P, P') = (P_\mu + P'_\mu) G_\pi(q^2), \quad (5)$$

wo wir die eine übrigbleibende Funktion mit $G_\pi(q^2)$ bezeichnen haben. Durch Vergleich mit dem hermitesch konjugierten von (5) bekommt man außerdem

$$G_\pi(q^2) = G_\pi^*(q^2). \quad (6)$$

$G_\pi(q^2)$ ist also reell für die Streuung eines reellen π -Mesons, d. h. für raumartiges $q = P' - P$. Für genügend kleine q^2 muß (5) in den Ausdruck übergehen, den die Störungsrechnung dafür liefert

$$j_\mu(P, P') \rightarrow (P_\mu + P'_\mu) Q_\pi; \quad (7)$$

hier bezeichnet $Q_\pi = \pm e$ die Ladung des π -Mesons. Es ist also

$$G_\pi(0) = Q_\pi \quad (8)$$

gleich der Ladung des π -Mesons. Diese Tatsache gestattet uns, $G_\pi(q^2)$ als die effektive Ladung bei der Energie-Impuls-Übertragung q zu interpretieren. Dann ist

$$F_\pi(q^2) = \frac{G_\pi(q^2)}{G_\pi(0)} = \frac{1}{Q_\pi} G_\pi(q^2) \quad (9)$$

der (reduzierte) Formfaktor des π -Mesons, der nach (9) auf 1 normiert ist

$$F_\pi(0) = 1. \quad (10)$$

G_π bzw. F_π beschreiben die innere Struktur der Ladung des π -Mesons. In der nichtrelativistischen Grenze ist G_π die FOURIER-Transformierte der statischen Ladungsdichte $\varrho_\pi(r)$ des π -Mesons

$$G_\pi(q^2) = \int \varrho_\pi(r) e^{i q r} dr. \quad (11)$$

Für genügend kleine q^2 läßt sich die Exponentialfunktion entwickeln, und man erhält ganz entsprechend wie bei den Formfaktoren der Nukleonen (in unserer Metrik ist $q^2 < 0$ für raumartiges q)

$$F_\pi(q^2) = 1 - \frac{1}{6} \overline{r_\pi^2} (-q^2) + \dots, \quad (12)$$

wobei jetzt $\overline{r_\pi^2} = \frac{1}{G_\pi(0)} \int r^2 \varrho_\pi(r) dr$ (13)

der mittlere quadratische Radius der Ladungsverteilung des π -Mesons ist. Im Gegensatz zum Strukturproblem bei den Nukleonen gibt es hier nur einen Formfaktor der Ladung, weil das π -Meson als Teilchen mit dem Spin 0 kein magnetisches Moment besitzt (Fehlen einer ausgezeichneten Achse).

Die Beziehung zwischen den Formfaktoren der verschiedenen geladenen π -Mesonen läßt sich leicht aus der Invarianz der Theorie gegen Ladungskonjugation herleiten. Die Ladungskonjugationsoperation verwandelt jedes Teilchen in sein Antiteilchen, also im Falle des π -Mesons $\pi^+ \rightarrow \pi^-$, $\pi^- \rightarrow \pi^+$. Die Forderung der Invarianz gegen Ladungskonjugation bedeutet somit, daß Teilchen und Antiteilchen entgegengesetzt gleiche Ladung und magnetisches Moment besitzen sowie gleiche Masse und gleichen Spin. Im Falle des π -Mesons gilt deshalb

$$G_{\pi^+}(q^2) = -G_{\pi^-}(q^2) \quad (14 \text{ a})$$

$$\text{oder} \quad F_{\pi^+}(q^2) = F_{\pi^-}(q^2). \quad (14 \text{ b})$$

Für das π^0 -Meson bedeutet die Invarianz gegen Ladungskonjugation, daß es bei der Ladungskonjugationstransformation in sich selbst überführt wird; es ist sein eigenes Antiteilchen. Damit folgt für seinen elektromagnetischen Formfaktor auch für $q^2 \neq 0$

$$F_{\pi^0}(q^2) = 0 \quad (15)$$

(natürlich in der hier betrachteten niedrigsten Näherung in e). G_π bzw. F_π ist also ein Vektor im isotopen Spinraum. Sein skalarer Anteil verschwindet wegen (15). Diese Folgerung gilt z. B. nicht für das K-Meson, da dort $K^0 \neq \bar{K}^0$ (und natürlich auch nicht für das Neutron wegen $n \neq \bar{n}$).

2. π -Meson-Elektron-Wechselwirkung

Wir betrachten nun die π -Meson-Elektron-Wechselwirkung in der durch Abb. 2 angedeuteten Näherung (Elektronenlinie ———, die übrigen Linien wie in Abb. 1). Die starke Wechselwirkung des π -Mesons wird durch den Formfaktor des π -Mesons exakt berücksichtigt, die elektromagnetische Wechselwirkung mit dem Elektron dagegen nur in niedrigster Näherung. Auf die Gültigkeitsgrenzen dieser Formfaktorbehandlung kommen wir in Abschnitt 5 noch zurück. Das Matrixelement lautet nach Abb. 2

$$M = \pm 4 \pi e^2 i (P_\mu + P'_\mu) F_\pi(q^2) \cdot \frac{1}{q^2} [\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p)]. \quad (16)$$

Hier bezeichnet $u(p)$ den Spinor des Elektrons zum Energie-Impuls-Vektor p , der eine bestimmte Spineinstellung charakterisiert, \bar{u} den adjungierten Spinor und γ_μ die DIRACschen Matrizen; die übrigen Symbole kamen bereits im letzten Abschnitt vor. Mittelt

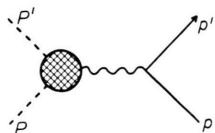


Abb. 2. Diagramm für die Streuung eines π -Mesons an einem Elektron (oder umgekehrt), wobei die elektromagnetische Wechselwirkung in erster Näherung und die starke Wechselwirkung exakt berücksichtigt wird (— Elektronenlinie).

man über die Spinrichtung des Elektrons im Anfangszustand und summiert über die Spinrichtungen im Endzustand, so bekommt man für das Absolutquadrat in invarianten Viererprodukten wegen der Realität von F_π

$$|M|^2 = 16\pi^2 \frac{e^4}{m_e^2} \frac{F_\pi^2(q^2)}{q^4} [(p'P)(pP) + (p'P)(pP') + (p'P')(pP) + (p'P')(pP')] - (p'p)(P'P) - m_\pi^2(p'p) + m_e^2(P'P') + m_\pi^2 m_e^2]. \quad (17)$$

Führt man jetzt noch den Bruchteil A der übertragenen Energie Q bezogen auf die kinetische Energie T des einfallenden Teilchens also $A = Q/T$ ein, so erhält man nach längeren Umrechnungen in der üblichen Weise die Wirkungsquerschnitte für die π -Meson-Elektron- und die Elektron- π -Meson-Streuung jeweils im Ruhesystem des zweiten Teilchens

$$d\sigma = \frac{2\pi e^4}{m_\pi m_e(\gamma-1)} \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1} \frac{dA}{A^2} F_\pi^2(q^2) \cdot \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} A - \frac{m_\pi}{m_e} \frac{\gamma-1}{2\gamma^2} A \right]; \quad (18)$$

$d\sigma$ stellt also die Anzahl der Stöße dar, bei der der Bruchteil der übertragenen Energie zwischen A und $A + dA$ liegt. γ ist das Verhältnis der Einfallsenergie des stoßenden Teilchens zu seiner Ruhenergie im Ruhesystem des zweiten Teilchens. Für π -Meson-Elektron-Streuung gilt somit in (18)

$$d\sigma_{\pi-e} : \quad \gamma = \frac{E_\pi}{m_\pi}, \quad A = \frac{Q_\pi}{T_\pi} = \frac{Q_\pi}{m_\pi(\gamma-1)}, \\ dA = \frac{dQ_\pi}{m_\pi(\gamma-1)} \quad (19)$$

und für Elektron- π -Meson-Streuung

$$d\sigma_{e-\pi} : \quad \gamma = \frac{E_e}{m_e}, \quad A = \frac{Q_e}{T_e} = \frac{Q_e}{m_e(\gamma-1)}, \\ dA = \frac{dQ_e}{m_e(\gamma-1)}. \quad (20)$$

Die Energie-Impuls-Übertragung q^2 ist in beiden Fällen

$$q^2 = -2m_\pi m_e(\gamma-1)A. \quad (21)$$

Der Bruchteil der übertragenen Energie A liegt zwischen 0 und A_{\max} , das durch die Stoßgesetze gegeben ist

$$A_{\max} = \frac{2(\gamma+1)}{2\gamma + \frac{m_\pi}{m_e} + \frac{m_e}{m_\pi}}. \quad (22)$$

$d\sigma_{\pi-e}$ und $d\sigma_{e-\pi}$ sind also völlig gleich, wenn γ , A und dA gleich sind. Das ist wegen (19), (20), (21) dann der Fall, wenn $E_\pi = (m_\pi/m_e) E_e \approx 273 E_e$ und $dQ_\pi = (m_\pi/m_e) dQ_e \approx 273 dQ_e$. Man braucht deshalb, um sonst gleiche Verhältnisse zu bekommen, bei der π -Meson-Elektron-Streuung eine um den Faktor $(m_\pi/m_e) \approx 273$ höhere Einfallsenergie des stoßenden Teilchens als bei der Elektron- π -Meson-Streuung.

3. Quantitativer Überblick

Die Elektron- π -Meson-Streuung ist also um den Faktor $(m_\pi/m_e) \approx 273$ energetisch günstiger, weil das schwere π -Meson das Schwerpunktssystem der beiden Teilchen festhält. Leider ist, wie wir schon in der Einleitung besprochen haben, die Elektron- π -Meson-Streuung aber nicht direkt durchführbar, sondern nach dem Vorschlag von CHEW und LOW⁵ bestenfalls durch einen Extrapolationsvorgang bestimmbar, der eine Meßgenauigkeit der Ausgangsdaten erfordert, die rund um eine Größenordnung höher liegt⁷, als sie bisher bei solchen Experimenten erreicht wurde. Da eine derartige Genauigkeitssteigerung bei Streuexperimenten in der nächsten Zeit wenig wahrscheinlich ist, andererseits aber eine Reihe von Beschleunigungsmaschinen für sehr hohe Energien geplant bzw. schon im Bau sind⁸, erscheint die π -Meson-Elektron-Streuung in dem hier interessierenden Bereich in der nahen Zukunft durchführbar. Wir wollen deshalb die Verhältnisse im folgenden etwas mehr quantitativ betrachten.

Wie wir schon in der Einleitung erwähnt haben, müssen wir den Einfluß sehr verschiedener Größen des mittleren quadratischen Radius $\sqrt{r_\pi^2}$ betrachten, da außer der starken π -Meson-Nukleon-Wechselwirkung, die $\sqrt{r_\pi^2} \approx 2\hbar/Mc$ liefert⁹, noch eine direkte $\pi - \pi$ -Wechselwirkung vorhanden sein kann, wie sie z. B. im Zusammenhang mit der Struktur der Nukleonen gegenwärtig diskutiert wird^{3, 4}. Im letzteren Falle könnte $\sqrt{r_\pi^2}$ recht groß sein. In Tab. 1 sind für einige Einfallsenergien des π -Mesons (im Laboratoriumssystem) die Größen γ , der maximale Bruchteil der übertragenen Energie A_{\max} und die

E_π (in GeV)	γ	A_{\max}	$ q^2 _{\max} / m_\pi^2$	$F_{\pi, \max}^2 \approx 1 - \frac{q^2 r_\pi^2}{3}$					
				$r_\pi^2 = (0,2f)^2$	$(0,5f)^2$	$(0,7f)^2$	$(1f)^2$	$(1,4f)^2$	$(2f)^2$
10	71,9	0,35	0,182	0,998	0,992	0,985	0,970	0,939	0,879
25	180	0,571	0,749	0,995	0,969	0,939	0,875		
50	360	0,728	1,91	0,987	0,920	0,844			
100	719	0,842	4,43	0,970	0,815				
300	2157	0,943	14,9	0,900					

Tab. 1. Übersicht für einige interessante Einfallsenergien des π -Mesons über $\gamma = E_\pi/m_\pi$, maximaler Bruchteil der übertragenen Energie A_{\max} , maximale Energie-Impuls-Übertragung und zugehöriges F_π^2 für verschiedene $\sqrt{r_\pi^2}$ in der gestaltunabhängigen Näherung (12). Die Stellen, an denen diese Näherung nicht mehr gilt, sind freigelassen ($1f = 10^{-13}$ cm).

maximale Energie-Impuls-Übertragung q_{\max} einge tragen. Dazu ist noch das Quadrat des Formfaktors des π -Mesons F_π für dieses q_{\max} und die mittleren quadratischen Radien $\sqrt{r_\pi^2} = 0,2; 0,5; 0,7; 1,0; 1,4; 2,0 \cdot 10^{-13}$ cm in der gestaltunabhängigen Näherung (12) berechnet. Da diese Näherung nur für $F_\pi \geq 0,9$ gültig ist, sind die Stellen mit $F_\pi^2 < 0,8$ freigelassen. Man sieht, daß schon mit den heute zugänglichen Energien bis 25 GeV zwischen den großen und den kleinen Werten von $\sqrt{r_\pi^2}$ Unterschieden werden könnte, wenn der Wirkungsquerschnitt wie üblich mit einem Fehler von 10% gemessen wird. Bei 10 GeV gibt ein RMS-Radius $r_\pi^2 = (2 \cdot 10^{-13}$ cm) 2 eine Abweichung von etwa 12%, bei 25 GeV $r_\pi^2 = (1 \cdot 10^{-13}$ cm) 2 eine Reduktion des Wirkungsquerschnittes von 12,5%. In Abb. 3 haben wir nach (12), (21), (22) aufgetragen, bis zu welchem mittleren quadratischen Radius herunter man den Formfaktor des π -Mesons bei einer gegebenen Einfallsenergie E_π mit Hilfe eines Streuexperimentes von 10% Fehler untersuchen kann. Man sieht, daß bei

25 GeV $\sqrt{r_\pi^2}$ bis auf etwa $0,8 \cdot 10^{-13}$ cm herunter geprüft werden kann. Bei 50 GeV wäre das bis auf $0,56 \cdot 10^{-13}$ cm, bei 100 GeV bis auf etwa $0,37 \cdot 10^{-13}$ cm und bei 300 GeV bis auf $0,2 \cdot 10^{-13}$ cm möglich. Wegen (12) ist dieses Ergebnis unabhängig von der speziellen Gestalt des Formfaktors. Die maximale Energie-Impuls-Übertragung $|q^2_{\max}|/m_\pi^2$ ist auch bei 300 GeV immer noch kleiner als bei den HOFSTADTERSchen Elektron-Nukleon-Streuversuchen ($|q^2_{\max}|/m_\pi^2 \approx 35$), was darauf zurückzuführen ist, daß die Masse des Nukleons etwa 6,7-mal größer ist als diejenige des π -Mesons.

Um auch für stärkere Abweichungen einen Überblick zu geben, haben wir in Abb. 4 das Verhältnis des $\pi - e$ -Streuquerschnittes mit Formfaktor zum Wirkungsquerschnitt mit $F_\pi = 1$ als Funktion von $\gamma = E_\pi/m_\pi$ für maximale Energie-Impuls-Übertragung aufgetragen. Dabei wurden zum Vergleich drei verschiedene mittlere quadratische Radien gewählt $\sqrt{r_\pi^2} = 0,2; 0,7; 1,4 \cdot 10^{-13}$ cm und als Ladungsverteilungen erstens eine sehr konzentrierte YUKAWA II-Verteilung benutzt, die im Nullpunkt quadratisch divergiert; ihr entspricht nach (11) der folgende nur schwach abfallende (auf eins normierte) Formfaktor

$$F_{\pi,1}(q^2) = \sqrt{\frac{2}{|q^2|r_\pi^2}} \operatorname{arc \, tg} \sqrt{\frac{|q^2|r_\pi^2}{2}}. \quad (23)$$

Zweitens wurde eine mittlere Verteilung gewählt, die exponentiell abfällt und die sich bekanntlich beim Nukleon sehr bewährt hat. Ihr entspricht der ebenfalls mittelstark abfallende Formfaktor [da bei der $\pi - e$ -Streuung nur raumartige q vorkommen, kann man in (24) und (25) $|q^2|$ schreiben]

$$F_{\pi,2}(q^2) = \frac{1}{\left(1 + \frac{|q^2|r_\pi^2}{12}\right)^2}. \quad (24)$$

Drittens wurde noch eine mehr ausgedehnte Verteilung betrachtet, nämlich eine GAUSSSche Verteilung.

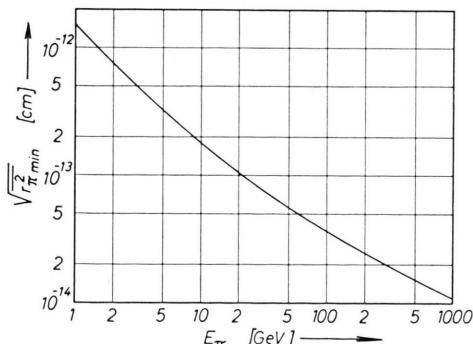


Abb. 3. Kleinster mittlerer quadratischer Radius $\sqrt{r_{\pi, \min}^2}$, bis zu dem der Formfaktor des π -Mesons unabhängig von seiner speziellen Gestalt bei einer gegebenen Einfallsenergie E_π (in GeV) durch ein $\pi - e$ -Streuexperiment mit einem Meßfehler von 10% untersucht werden kann.

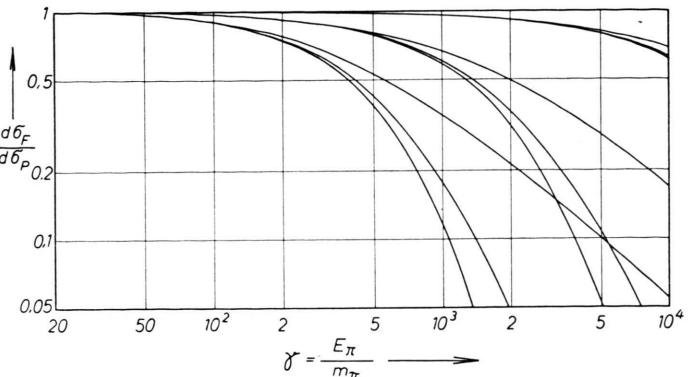


Abb. 4. Verhältnis des π -e-Streuquerschnittes mit und ohne Formfaktor (punktformig) $d\sigma_F/d\sigma_P$ als Funktion von $\gamma = E_\pi/m_\pi$ für maximale Energie-Impuls-Übertragung. Die obere Kurvenschar gilt für eine sehr konzentrierte YUKAWA II-Verteilung (23), die mittlere für eine exponentielle Verteilung (24) und die untere für eine GAUSSSCHE Verteilung (25). Dazu wurde jedesmal ein kleiner, ein mittlerer und ein großer gemittelter quadratischer Radius gewählt:

$$\sqrt{r_\pi^2} = 0.2; 0.7; 1.4 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

Dieser Verteilung entspricht nach (11) ein stärker abfallender Formfaktor

$$F_{\pi,3}(q^2) = \exp \left\{ -\frac{|q^2| \bar{r}_\pi^2}{6} \right\}. \quad (25)$$

Zwischen den hier angegebenen Werten wird der gemessene Wirkungsquerschnitt liegen, je nachdem ob der mittlere quadratische Radius relativ kleiner oder größer ausfällt und je nachdem die Ladungsverteilung mehr oder weniger konzentriert ist.

4. Vergleich mit der Erfahrung

Hier liegt bereits eine Arbeit vor, die im vergangenen Jahre in Berkeley am Bevatron durchgeführt worden ist¹⁰. Dabei wurden π -Mesonen von 1,13 GeV auf eine Blasenkammer mit flüssigem Wasserstoff geschossen und die Spuren von δ -Strahl-Elektronen vermessen. Für $E_\pi = 1,13$ GeV ist $\gamma = 8,13$ und damit die maximale Energie-Impuls-Übertragung nach (21) und (22) $|q^2_{\max}|/m_\pi^2 = 0,0033$. Aus Abb. 4 ersieht man, daß für dieses q^2 bzw. γ auch bei über Erwarten großem π -Meson keine Abweichung beobachtet werden kann. Die Messungen liefern einen von $Q = 32$ MeV bis $Q_{\max} = 62$ MeV [kinematische obere Grenze nach (19) und (22)] integrierten Wirkungsquerschnitt $\sigma = 1,37 \pm 0,17$ mb, während die Theorie mit $F_\pi = 1$ $\sigma = 1,17$ mb ergibt. Mit einem Meßfehler von 10% könnte man bei dieser Energie den mittleren quadratischen Radius des π -Mesons bis auf $\sqrt{r_\pi^2} \approx 9,5(1/m_\pi) \approx 1,34 \cdot 10^{-12}$ cm prüfen, wie man aus Abb. 3 sieht.

5. Gültigkeitsgrenzen

Wir wollen nun noch die Gültigkeitsgrenzen der Formfaktoranalyse bei der π -Meson-Elektron-Wechselwirkung, also insbesondere beim Wirkungsquerschnitt (18), (19) besprechen. Diese sind vor allem

dadurch gekennzeichnet, daß sämtliche höheren elektromagnetischen Näherungen vernachlässigt worden sind. Zunächst sind also die Strahlungskorrekturen für den Elektronenstrom hinzuzufügen. Das kann im Rahmen der benötigten Genauigkeit in relativ einfacher Weise mit Hilfe der bekannten SCHWINGERSchen Strahlungskorrekturen¹¹ (und eventuell ihrer Verbesserungen bei ungenügender Energieauflösung) geschehen, ganz entsprechend wie bei den HOFSTADTERSchen Streuexperimenten. Die Gültigkeit der Formfaktoranalyse wird durch diese Strahlungskorrekturen nicht beeinflußt. Wir werden uns deshalb hier nicht weiter damit beschäftigen und voraussetzen, daß diese Strahlungskorrekturen (in der nächsten Näherung in e^2) bereits an den Experimenten vorgenommen worden sind.

Dann gibt es Strahlungskorrekturen auf der Seite des π -Mesons, also zum Formfaktor, wie sie in der Abb. 5 in der nächsten Näherung in e^2 angedeutet worden sind. Diese beeinflussen die Gültigkeit der Formfaktoranalyse ebenfalls nicht, die darauf beruht,

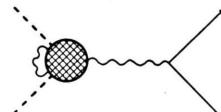


Abb. 5. Strahlungskorrektur zum Formfaktor des π -Mesons.

dass nur ein Photon zwischen dem π -Meson und dem Elektron ausgetauscht wird. Wir können uns die Strahlungskorrekturen zum Formfaktor bereits in dem (hier unbestimmt bleibenden) Formfaktor eingeschlossen denken. Wenn dagegen der Formfaktor des π -Mesons aus Rechnungen mit der starken Wechselwirkung allein gewonnen worden ist (wie z. B. aus Berechnungen der Struktur der Nukleonen²⁻⁴), können diese Strahlungskorrekturen (wieder in nächster Näherung in e^2) als Korrekturen zum π -Mesonen-Strom mit Hilfe der SCHWINGERSchen Strah-

lungskorrekturen ganz entsprechend berücksichtigt werden wie die eben besprochenen Korrekturen zum Elektronenstrom.

Drittens gibt es höhere elektromagnetische Näherungen, die auf dem Austausch mehrerer Quanten zwischen π -Meson und Elektron beruhen. In Abb. 6 ist dazu die nächste Näherung in e^2 aufgezeichnet. Diese Terme lassen sich nicht mehr durch einen Formfaktor in dem eingeführten Sinne darstellen. Die obige Formfaktoranalyse kann nur so lange gut sein, wie diese Terme vernachlässigbar klein sind (d. h. im experimentellen Fehler verschwinden). Ihre zuverlässige Berechnung ist sehr schwierig; man muß dabei die exakte Streuamplitude für COMPTON-Streuung an Mesonen (mit virtuellen Quanten) ermitteln,

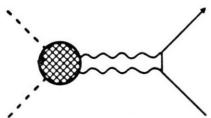


Abb. 6. Diagramm für die π -e-Streuung mit Austausch zweier Quanten (virtueller Compton-Effekt am π -Meson). Dieser Beitrag läßt sich nicht im Formfaktor einschließen.

wie man aus Abb. 6 unmittelbar sieht. Experimentell ist natürlich über die COMPTON-Streuung an Mesonen (auch mit reellen Quanten) nichts bekannt. Im Prinzip könnte man sie nach dem allgemeinen Vorschlag von CHEW und Low⁵ durch Extrapolation aus der inelastischen Photoerzeugung von π -Mesonen an Protonen $\gamma + p \rightarrow \gamma' + n + \pi^+$ bestimmen, wobei aber wie bei der Elektron- π -Meson-Streuung der Extrapolationsvorgang wahrscheinlich wieder unerreichbar hohe Genauigkeiten der experimentellen Ausgangswerte erfordert. Für die Elektron-Nukleon-Streuung ist der in Abb. 6 dargestellte Term kürzlich von DRELL und FUBINI¹² abgeschätzt worden. Dabei ergibt sich, daß sein Beitrag zum gesamten Wirkungsquerschnitt in der Größenordnung von 1% liegt für etwa 1 GeV Einfallsenergie und maximale Energie-Impuls-Übertragung. Spezialisiert man (21) und (22) auf die Elektron-Proton-Streuung mit $\gamma = 2 \cdot 10^3$, so erhält man $|q^2_{\max}|/m_\pi^2 = 67$. Dieser Wert ist etwa 4,5-mal größer als die maximalen hier betrachteten Energie-Impuls-Übertragungen, wie man aus Tab. 1 entnimmt. Man wird deshalb im Hinblick auf den üblichen experimentellen Fehler von etwa 10% bei solchen Streuexperimenten auch unter Berücksichtigung der Tatsache, daß das π -Meson etwa 6,7-mal leichter ist als das Proton, erwarten dürfen, daß die in Abb. 6 angedeuteten Terme in dem hier

betrachteten Bereich noch keinen ins Gewicht fallenden Einfluß ausüben. Das Gegenteil könnte nur dann der Fall sein, wenn die (virtuelle) COMPTON-Streuung an π -Mesonen bereits für verhältnismäßig kleine q^2 eine unerwartet starke Resonanz besitzt.

Bisher ist bei allen Rechnungen die strenge Gültigkeit der orthodoxen Quantenelektrodynamik vorausgesetzt worden. Zwar ist die Quantenelektrodynamik in ausgezeichneter Übereinstimmung mit der Erfahrung (LAMBSche Verschiebung, anomales magnetisches Moment), jedoch liegen noch keine genügend genauen Prüfungen bei den großen hier betrachteten Energie-Impuls-Übertragungen vor. Aus Abb. 2 sieht man unmittelbar, daß eine Modifikation der Quantenelektrodynamik etwa durch einen Formfaktor beim Elektronenvertex (infolge einer möglicherweise ausgedehnten Ladungsverteilung des Elektrons) oder bei der Ausbreitungsfunktion des Photons (weil das COULOMBSche Gesetz eventuell bei kleinen Abständen nicht mehr richtig ist) sich mit dem Formfaktor des π -Mesons multipliziert und deshalb bei der π -Meson-Elektron-Streuung nicht getrennt wahrgenommen werden kann. Die eben erwähnte mögliche Abänderung der Quantenelektrodynamik kann eindeutig nur mit Hilfe von Elektron-Elektron- bzw. Positron-Elektron-Streuung festgestellt werden, wie schon frühzeitig untersucht worden ist¹³. Daneben ist in der Quantenelektrodynamik noch eine Abänderung der (virtuellen) Ausbreitungsfunktion des Elektrons denkbar¹⁴, die natürlich im vorliegenden Falle keine Rolle spielt, da in der niedrigsten Näherung der π -e-Wechselwirkung keine virtuelle Elektronenlinie vorkommt. Diese kann durch Weitwinkelpaarerzeugung¹⁶ bzw. Weitwinkelbremsstrahlung oder ganz im Rahmen der Quantenelektrodynamik durch COMPTON-Streuung an Elektronen oder besser noch durch 2-Quanten-Paarnichtvernichtung¹⁵ untersucht werden. Bisher ist von der letzten Art der Nichtlokalität nur bekannt, daß ihr mittlerer quadratischer Radius

$$\sqrt{r_e^2} = \sqrt{6}/\Lambda_e < 2,45 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

ist¹⁷, während die erste Art der Nichtlokalität durch die HOFSTADTERSchen Elektron-Proton-Streuexperimente auf $\sqrt{r_\gamma^2} \leq 0,8 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ begrenzt wird, falls dort keine Kompensation von Nukleon- und Elektron-Struktureffekten vorkommt¹⁵.

¹⁶ J. D. BJORKEN, S. D. DRELL u. S. C. FRAUTSCHI, Phys. Rev. **112**, 1409 [1958].

¹⁷ B. RICHTER, Phys. Rev., Letters **1**, 114 [1958].